ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ – ΟΡΙΣΜΕΝΑ

Έστω $z(t) = x(t) + i y(t)$, $t \in [a,b]$

το ολοκλήρωμα της z ορίζεται ως:

$$\int_a^b z(t)\,dt := \int_a^b x(t)\,dt + i\int_a^b y(t)\,dt$$

ΠΡΟΤ) Να πούμε ότι $\forall z : [a,b] \to \mathbb{C}$ ισχύει

$$\left|\int_a^b z(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |z(t)|\,dt$$

<u>Απόδειξη</u>.

$$\left|\int_a^b z(t)\,dt\right| = \sqrt{\left(\int_a^b x(t)\,dt\right)^2 + \left(\int_a^b y(t)\,dt\right)^2} \overset{\text{Θδο}}{\leq} \int_a^b \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}\,.dt$$

$\forall\, t, s \in [a,b]$: Cauchy-Schwartz

$$\langle x(t), y(t)\rangle \cdot \langle x(s), y(s)\rangle \leq |\langle x(t), y(t)\rangle| \cdot |\langle x(s), y(s)\rangle| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t)\cdot x(s) + y(t)\,y(s) \leq |z(t)|\cdot|z(s)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b x(t)\,x(s)\,ds + \int_a^b y(t)\,y(s)\,ds \leq \int_a^b |z(t)|\cdot|z(s)|\,ds \Rightarrow$$

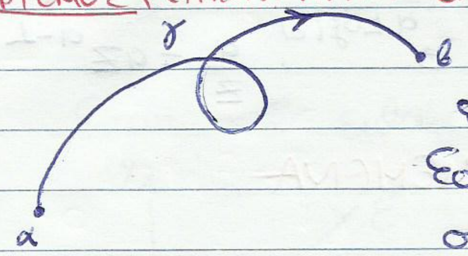
$$\Rightarrow x(t)\int_a^b x(s)\,ds + y(t)\int_a^b y(s)\,ds \leq |z(t)|\int_a^b |z(s)|\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b x(t)\,dt \int_a^b x(s)\,ds + \int_a^b y(t)\,dt \int_a^b y(s)\,ds \leq \int_a^b |z(t)|\,dt \cdot \int_a^b |z(s)|\,ds$$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b x(t)\,dt\right)^2 + \left(\int_a^b y(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b |z(t)|\,dt\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\int_a^b x(t)\,dt\right)^2 + \left(\int_a^b y(t)\,dt\right)^2} \leq \int_a^b |z(t)|\,dt$$

ΟΡΙΣΜΟΣ (ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ)



Έστω η καμπύλη (γ) παραμετρικής εξίσωσης $z=z(t)$, $\forall t\in[a,b]$

Έστω f συνεχής με πεδίο ορισμού το σύνολο σημείων της καμπύλης (γ).

Τότε: $\int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt := \int_\gamma f(z)\, dz$: επικαμπύλιο ολοκλ. της f κατά μήκος της καμπύλης (γ)

Θεωρούμε $t=\psi(s)$, $s\in[a_0,b_0]$

$z(t) := z(\psi(s)) = z_1(s)$, $s\in[a,b_0]$ αναπαραμέτρηση ①

$$\int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\, dt \overset{①}{=} \int_{a_0}^{b_0} f(z(\psi(s)))\, \underbrace{z'(\psi(s))\,\psi'(s)}_{=(z_1(\psi(s)))'}\, ds =$$

$$= \int_{a_0}^{b_0} f(z_1(s))\, z_1'(s)\, ds$$

Ανεξάρτητα δηλαδή την μορφή της καμπύλης ή καλύτερα την παραμετρική μορφή της καμπύλης το αποτέλεσμα του επικαμπυλίου θα είναι το ίδιο!

Π.χ

$\int_\gamma (z^2+3\sqrt[4]{z})\, dz = ;$ γ : άνω τμήμα μοναδιαίου κύκλου με θετική φορά με $\sqrt[4]{z}$ ο κλάδος της 4ης ρίζας του z τ/ω: $\sqrt[4]{1}=-i$

ΛΥΣΗ

$z(t)=x(t)+iy(t)$, $t\in[0,\pi]$

$z(t)=e^{it}$, $t\in[0,\pi]$

$$\int_\gamma (z^2+3\sqrt[4]{z})\, dz = \int_0^\pi (z(t)^2+3\sqrt[4]{z(t)})\, dt \quad ①$$

όπου,

$$\sqrt[4]{e^{it}} = \begin{cases} e^{it/4} \\ e^{it/4+\frac{2\pi i}{4}} \\ e^{it/4+\frac{2\cdot 2\pi i}{4}} \\ e^{it/4+\frac{3\cdot 2\pi i}{4}} \end{cases} = \begin{cases} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{cases}$$

$e^{it/4+\frac{3\cdot 2\pi i}{4}}$

Άρα, μας κάνει η εκφραση:

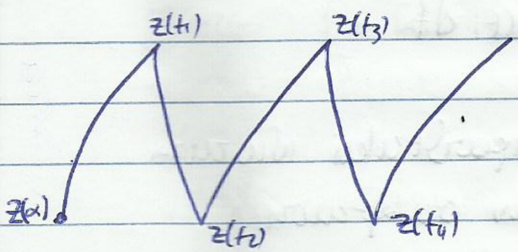
Άρα, η ① είναι:

$$\int_0^{\pi} \left(e^{2it} + 3e^{i\frac{t}{4}+3\frac{\pi}{2}i}\right) i e^{it}\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi} e^{3it} \cdot i\,dt + 3\int_0^{\pi} e^{\frac{5t}{4}i+\frac{3\pi}{2}i}\,dt =$$

$$= \frac{1}{3} e^{3it}\Big|_0^{\pi} - 3i\frac{4}{5} e^{i\frac{5t}{4}}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3}(-1-1) - 3i\frac{4}{5}\left(e^{5\pi/4}-1\right)$$

Διασπασιμ καμπυλες:



$z(t)$, $t \in [a,b]$

$\exists\, t_0 = a < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$

$\exists\, z'(t)$ $t \in (t_j, t_{j+1})$ συνεχης

δηλ, $\underbrace{\exists \lim_{t \to t_j+0} z'(t) \text{ και } \lim_{t \to t_{j+1}-0} z'(t)}_{\text{διαφορίσιμη}}$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(z(t))\, z'(t)\,dt$$, οπου απο $\underset{\text{συνεχης}}{t_j \qquad t_{j+1}}$

οποτε αφου είναι συνεχης στο ανοιχτό ορίζω τα ορια $\lim_{t \to t_j+0} f(z(t))$ και $\lim_{t \to t_{j+1}-0} f(z(t))$ και άρα η f συνεχης

στο κλειστο $[t_j, t_{j+1}]$. Έτσι,

$$\sum_{j=0}^{k} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt = \int_{\gamma} f(z)\,dz$$

γενικότερα αν έχουμε την αλυσίδα $C=\{\gamma_1,\dots,\gamma_n\}$
τότε

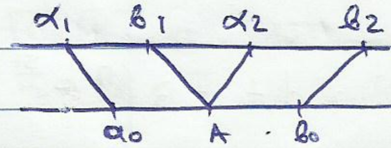
$$\int_C f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz$$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πάνω στο άθροισμα των καμπυλών.

Δύο καμπύλες:

$\gamma_1: z_1(t),\ t\in[a_1,b_1]$

$\gamma_2: z_2(t),\ t\in[a_2,b_2]$



τότε $\gamma: z(t),\ t\in[a_0,b_0]$

Έτσι, το $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$ είναι

$$\int_{a_0}^{b_0} f(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_{a_0}^{A} f(z(t))\,z'(t)\,dt + \int_{A}^{b_0} f(z(t))\,z'(t)\,dt =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} f(z_1(t))\,z_1'(t)\,dt + \int_{a_2}^{b_2} f(z_2(t))\,z_2'(t)\,dt$$

Δηλ. το ολοκλήρωμα έχει την προσθετική ιδιότητα ως προς την καμπύλη και ως προς την συνάρτηση.
Δηλαδή ισχύει:

$$\int_\gamma \big(f(z)+g(z)\big)\,dz = \int_a^b \big(f(z(t))+g(z(t))\big)\,z'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt + \int_a^b g(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_\gamma f + \int_\gamma g.$$

Θεώρημα:

Εάν $f:\gamma\to\mathbb{C}$ συνεχής και $\mu(\gamma)$: μήκος του γ.
και M άνω φράγμα της $|f(z)|$, $z\in\gamma$ (δηλ. $|f(z)|\le M,\ \forall z\in\gamma$)
τότε $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le M\cdot\mu(\gamma)$.

Απόδειξη

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\alpha^b f(z(t))\,z'(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(z(t))\,z'(t)|\,dt =$$

$$= \int_a^b |f(z(t))|\cdot|z'(t)|\,dt \le M\int_a^b |z'(t)|\,dt = M\,\mu(\gamma).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ολοκληρωτικού λογισμού μιγαδικής μεταβλητής)

Έστω f και F δύο συναρτήσεις :

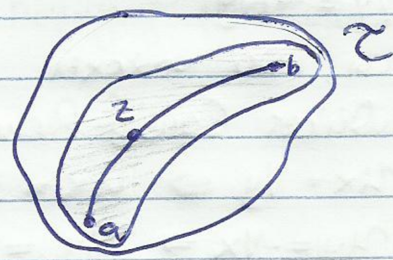
$$F'(z) = \frac{dF(z)}{dz} = f(z), \quad z\in\tau : \text{τόπος}$$

τότε

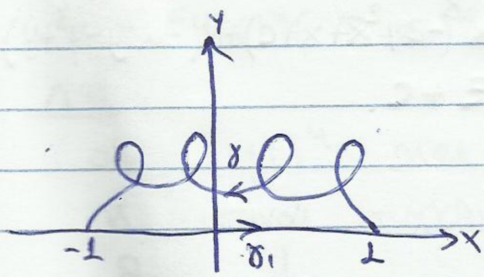
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_a^b F'(z(t))\,z'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}F(z(t))\,dt = F(z(b)) - F(z(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

Αν τώρα γ κατά τμήματα διαφορίσιμη κλειστή καμπύλη δηλ $f(a)=f(b)$ τότε $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.



Πχ



$$\int_\gamma (z+\eta\mu z)\,dz.$$

Έστω $f(z) = z + \eta\mu z$ και

$$F(z) = \frac{z^2}{2} - \sigma\upsilon\nu z$$

όπου $\Gamma = \gamma + \gamma_1$ κλειστή $(F(-1) = F(1))$

$$I = \int_\gamma (z+\eta\mu z)\,dz = \int_\Gamma \cancel{(z+\eta\mu z)\,dz}^{\,0} - \int_{\gamma_1} (z+\eta\mu z)\,dz =$$

$$= \int_{\gamma_1} (z+\eta\mu z)\,dz \ \underset{\gamma_1 = x'x}{\overset{z = x\in\mathbb{R}}{=\!=\!=}}\ \int_{-1}^{1} (x+\eta\mu x)\,dx$$

Ασκήσεις:

Παραδ. 4.9.3 (σελ 121)

Να εξετασθεί αν υπάρχει και αν ναι, να βρεθεί ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση οπου το φανταστικό μέρος να είναι η συνάρτηση τύπου:

$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + y$ και ικανοποιεί τη σχέση $f(-i)+f(i)=2$

ΛΥΣΗ

f ολόμορφη $\Rightarrow f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \Rightarrow u, v$ συζυγείς αρμονικές

Πρώτα θα εξετάσουμε εάν v αρμονική.

Έτσι, θα πρέπει να ικανοποιείται η εξίσωση

$v_{xx} + v_{yy} = 0$ ①

$$\left.\begin{aligned} &v_x = 6xy, \quad v_{xx} = 6y \\ &v_y = 3x^2 - 3y^2 + 1 \\ &v_{yy} = -6y \end{aligned}\right\} \text{①}: \; v_{xx} + v_{yy} = 6y - 6y = 0 \Rightarrow v \text{ αρμονική}$$

Έτσι, θα υπάρχει $f(z) = u + iv$ ολόμορφη $\Rightarrow$ ισχύουν οι συνθήκες Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ & $u_y = -v_x$

- $u_x = v_y \Rightarrow u_x = 3x^2 - 3y^2 + 1 \Rightarrow u(x,y) = x^3 - 3y^2x + x + g(y)$
- $u_y = -v_x \Rightarrow u_y = -6yx + g'(y) \Rightarrow \cancel{-6yx} + g'(y) = \cancel{-6xy} \Rightarrow$

  $\Rightarrow g'(y) = c$, c: σταθ.

Άρα, $u(x,y) = x^3 - 3y^2x + x + c$, $f(z) = (x^3 - 3y^2x + x + c) + i(3x^2y - y^3 + y)$

$\Rightarrow f(z) = (x+iy)^3 + (x+iy) + c = z^3 + z + c.$

Από, $f(-i) + f(i) = 2 \Rightarrow c = 1$

Άρα, $f(z) = z^3 + z + 1$

Παραδ. 4.8.6 (σελ.112)

Νδο η $f(z) = |z|^4 + 2|z|^2 + 4\bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$ παραγωγίζεται μόνο στο -1 και έχει παράγωγο ίση με -4

ΛΥΣΗ

$f(z) = z^2\bar{z}^2 + 2z\bar{z} + 4\bar{z}$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 2z^2\bar{z} + 2z + 4 = 0 \overset{z=x+iy}{\Longrightarrow} 2(x+iy)^2(x-iy) + 2(x+iy) + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^3+xy^2+x+2)+i(yx^2+y^3+y)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3+xy^2+x+2=0 \\ yx^2+y^3+y=0 \Rightarrow y\underbrace{(x^2+y^2+1)}_{\neq 0}=0 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

Έτσι, για $y=0$ η $1^η$ γίνεται:

$$x^3+x+2=0 \Rightarrow (x+1)\underbrace{(x^2-x+2)}_{\text{Αδύνατη}}=0 \Rightarrow x=-1$$

$$z_0=-1+0i$$

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}+4 = \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}+4 =$$

$$= \frac{(-1+h)^2(\overline{-1+h})+2(-1+h)(\overline{-1+h})+4(\overline{-1+h})}{h} - \frac{4h}{h} =$$

$$= h\bar{h}^2-2h\bar{h}+h-2\bar{h}^2+6\bar{h}+\frac{\bar{h}^2}{h} \sim \bar{h}\frac{\bar{h}}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0 \text{ (μηδ}\times\text{φραγμ.)}$$

$$\left|\frac{\bar{h}}{h}\right| = \frac{|\bar{h}|}{|h|}=1$$

άρα $\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}+4 \xrightarrow{h\to 0} 0 \Rightarrow f$ παραγωγ. μόνο στο -1

και έχει παράγωγο του με -4.

Παραδ. 4.13.3 (σελ. 130)

Ποιος ο δίσκος σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^n(z-2i)^n$$

ΛΥΣΗ

$a_n=(1+i)^n$ και κέντρο της δυναμοσειράς το $2i$

η ακτίνα σύγκλισης είναι:

$$R=\frac{1}{\limsup\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\limsup\sqrt[n]{|1+i|^n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

άρα η σειρά συγκλίνει στο δίσκο $B(2i,\frac{\sqrt{2}}{2})$

Παραδ. 4.15.1 (σελ. 135)

Ποιος ο δακτύλιος σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3+4i)(z+2i)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{10^n}$$

ΛΥΣΗ

Κέντρο της δυναμοσειράς το $-2i$

Για τη σειρά Laurant

$b_{-n} := (3+4i)^n$ με $r_1 = \limsup \sqrt[n]{|b_{-n}|} = |3+4i| = 5$

Η πρώτη σειρά συγκλίνει στο δακτύλιο $\Delta(-2i; 5, +\infty)$

Έπειτα, $b_n := 10^{-n}$ με $r_2 = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|b_n|}} = 10$

Συνεπώς, η δεύτερη σειρά συγκλίνει στο δίσκο $B(-2i, 10)$

Άρα, η σειρά Laurant συγκλίνει στο δακτύλιο $\Delta(-2i; 5, 10)$